SOLUCIONARIO DE EXAMEN PARCIAL DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **DURACION: 60 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1

a) ¿Como se escribe el predecesor y sucesor del número uno en una máquina hipotética tipo IEEE 745, que usa 7 bits en la mantisa, 4 bits en el exponente, un bit en el signo, en notación de máquina y en notación de punto flotante?.
Solución
Predecesor : 1 0110 1111111= $+(1.1111111)2^{-1}$= 0.9921875
Sucesor : 1 0111 0000001= $+(1.0000001)2^{0}$ =1.0078125

b) Escriba la siguiente función en Matlab para el método de sobre-relajación:

function wop=wSOR(A)

Si la matriz es tridiagonal y definida positiva ***wop*** retorna el factor ω óptimo, en caso contrario retorna “Inf”.

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}}$$

Solución

```
function wop=wSOR(A)
n=size(A,1);
T=diag(diag(A))+diag(diag(A,1),1)+diag(diag(A,-1),-1);
if A==T
   td=1;
else
   td=0;
end
defpos=1;
for i=1:n
   m=det(A(1:i,1:i));
   if m<=0
      defpos=0;
   end
end
if (td==1)&(defpos==1)
   D=diag(diag(A)); L=D-tril(A); U=D-triu(A);
   Tj=inv(D)*(L+U); rhoj=max(abs(eig(Tj)));
   wop=2/(1+sqrt(1-rhoj^2));
else
   wop=inf;
end
```

c) Demuestre que la siguiente sucesión converge a $\sqrt{2}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^{\,2} + 2}{2x_n}$$

Realice 03 iteraciones a partir de $x_0 = 2$

Solución

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\,2} - 2}{2x_n}$$

$$f(x_n) = x_n^{\,2} - 2$$

$$f'(x_n) = 2x_n$$

Por Newton

De la ecuación f(x)=x^2-2=0;

x converge a $\sqrt{2}$

03 iteraciones

x1=1.5

x2=1.4167

x3=1.4142

Problema 2

a) Use cuatro dígitos de la representación de punto flotante con aritmética truncada, y la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para aproximar la solución de la ecuación cuadrática dada por:

0.05010x^2 -98.78x +5.015=0

b) Calcular los errores absolutos y relativos de cada resultado, tomando las soluciones 1971.605916, 0.05077069387

c) Explique los resultados, y obtenga otra formula para resolver la ecuación cuadrática y mejorar sus resultados.

Solución

a=0.0501

b=-98.78

c=5.015

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 = 9757$$

$$4ac = 1.005$$

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{9.755 * 10^3} = 98.76$$

$$x_1 = \frac{-(-98.78) + 98.76}{0.1002} = \frac{197.5}{0.1002} = 1.971 * 10^3$$

$\varepsilon_{x_1} = 0.6059$

$\delta_{x_1} = 0.03\%$

$$x_2 = \frac{-(-98.78) - 98.76}{0.1002} = \frac{0.2*10^{-1}}{0.1002} = 0.1996$$

$\varepsilon_{x_2} = 0.15$

$\delta_{x_2} = 293.1\%$

La respuesta x_2 se aleja del valor exacto debido a un error de cancelación al restar dos cantidades muy parecidas.

Nueva fórmula para calcular x_2

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Despejar x_2 de la ecuación anterior

$$x_2 = \frac{c}{x_1 a} = \frac{5.015}{98.74} = 0.05078$$

El cálculo es mas exacto para la segunda raíz, siendo el error relativo de 0.02%

Problema 3

Un móvil de masa m_1 se desplaza en el plano $X - Y$ con dos tripulantes a bordo de masas m_2 y m_3, respectivamente; se sabe que la trayectoria obedece a la siguiente función:

$$y = m_1 x^2 + m_2 e^x + m_3$$

Experimentalmente se tomaron tres puntos de dicha trayectoria:

x	1	1.5	2
y	0.733	1.464	2.513

a) Plante el sistema de ecuaciones para obtener las masas.
b) Analice la convergencia del sistema para el método de Jacobi.
c) Si existe convergencia realice 03 iteraciones de Jacobi partiendo de un vector nulo y muestre el error, en caso contrario resuelva el sistema usando eliminación Gaussiana con pivoteo total.

Solución

a) Planteando la ecuación para cada punto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.7183 & 1 \\ 2.25 & 4.4817 & 1 \\ 4 & 7.3891 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.733 \\ 1.464 \\ 2.513 \end{bmatrix}$$

b) Análisis de convergencia para Jacobi:

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -2.7183 & -1 \\ -0.502 & 0 & -0.2231 \\ -4 & -7.3891 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_J) = 3.0088 > 1$$

Por lo tanto diverge!

c) Resolviendo por Eliminación Gaussiana con pivoteo total:

Intercambiando fila 1 y fila 3:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7.3891 & 1 \\ 2.25 & 4.4817 & 1 \\ 1 & 2.7183 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5130 \\ 1.464 \\ 0.7330 \end{bmatrix}$$

Intercambiando columna 1 y columna 2:

$$\begin{bmatrix} 7.3891 & 4 & 1 \\ 4.4817 & 2.25 & 1 \\ 2.7183 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_1 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5130 \\ 1.464 \\ 0.7330 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = A_{21} / A_{11} \quad f_2 = f_2 - m_{21} * f_1$$
$$m_{31} = A_{31} / A_{11} \quad f_3 = f_3 - m_{31} * f_1$$

$$\begin{bmatrix} 7.3891 & 4 & 1 \\ 0 & -0.1761 & 0.3935 \\ 0 & -0.4715 & 0.6321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_1 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5130 \\ -0.0602 \\ -0.1915 \end{bmatrix}$$

Intercambiando fila 2 y fila 3:

$$\begin{bmatrix} 7.3891 & 4 & 1 \\ 0 & -0.4715 & 0.6321 \\ 0 & -0.1761 & 0.3935 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_1 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5130 \\ -0.1915 \\ -0.0602 \end{bmatrix}$$

Intercambiando columna 2 y columna 3:

$$\begin{bmatrix} 7.3891 & 1 & 4 \\ 0 & 0.6321 & -0.4715 \\ 0 & 0.3935 & -0.1761 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5130 \\ -0.1915 \\ -0.0602 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = A_{32} / A_{22} \quad f_3 = f_3 - m_{32} * f_2$$

$$\begin{bmatrix} 7.3891 & 1 & 4 \\ 0 & 0.6321 & -0.4715 \\ 0 & 0 & 0.1174 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5130 \\ -0.1915 \\ 0.0590 \end{bmatrix}$$

Aplicando sustitución inversa:

$$m_1 = 0.5025$$
$$m_3 = 0.0719$$
$$m_2 = 0.0584$$

Problema 4

La ecuación $25x^2 - 25x + 4 = 0$, tiene en el intervalo [0.8, 1], una única raíz α.

a) Verifique que α es punto fijo de la función $\varphi(x) = 1 - \dfrac{4}{25x}$

b) Pruebe que la sucesión x_n definida por:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 - \dfrac{4}{25x_n}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Converge para α

c) Atendiendo la definición del punto fijo, determine α

d) Determine x_2 e indique el número de cifras decimales significativas que puede garantizar para x_2.

Solución:

a) Como α es raíz de la ecuación $25x^2 - 25x + 4 = 0$ entonces $25\alpha^2 - 25\alpha + 4 = 0$

De este modo

$$\alpha = 1 - \frac{4}{25\alpha} = \varphi(\alpha)$$

Por lo tanto α es punto fijo de la función $\varphi(n) = 1 - \dfrac{4}{25n}$ pues $\varphi(\alpha) = \alpha$

b) Es necesario verificar que la función $\varphi(n) = 1 - \dfrac{4}{25n}$ satisface en el intervalo [0.8, 1] las condiciones del teorema del punto fijo

i) φ es continua en [0.8, 1] pues [0.8, 1] ⊂ R-{0}

$$\varphi'(x) = \frac{1}{25x^2} > 0, \quad \forall x \in [0.8, 1]$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ es estrictamente cresciente en $[0.8, 1]$

ii) $\Rightarrow \underbrace{\varphi(0.8)}_{0.8} \leq \varphi(x) \leq \underbrace{\varphi(1)}_{21/25}$

$$\Rightarrow \varphi(x) \in [0.8, 1] \subseteq [0.8, 21/5]$$

iii) $$|\varphi'(x)| = \left|\frac{2}{25x^2}\right| = \frac{4}{25x^2} \le \frac{4}{25\times\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{4} = K \ <1$$

Como satisface i) , ii) y iii) la sucesión converge.

c) Dado que α es punto fijo entonces

$$25\alpha^2 - 25\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{50}$$

$\therefore$

$\alpha = \frac{4}{5}$ ó $\alpha = \frac{1}{5}$

Necesariamente

$$\alpha = \frac{4}{5}$$

d) Como $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, n=0,1,2,.., se tiene

$$x_1 = \varphi(x_0) = 1 - \frac{4}{25*1} = \frac{21}{25} = 0.84$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = 1 - \frac{4}{25*\left(\frac{21}{25}\right)} = \frac{17}{21} = 0.8095$$

Luego

$$|\alpha - x_n| \le \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}| \quad \text{por lo que}$$

$$|\alpha - x_2| \le \frac{k}{1-k}|x_2 - x_1| \le \frac{0.25}{1-0.25}*0.0305$$

$$= 0.0102 < 0.05 = 0.5*10^{-1}$$

Podemos garantizar, para x_2, por lo menos con 1 cifra decimal significativa.

Los Profesores